Cours du 29.03.2021 APRES-MIDI
lundi, 29 mars 2021 12:35

Rappel :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\vec{x} \wedge \vec{y}}_{\vec{z}} = -\underbrace{\vec{y} \wedge \vec{x}}_{\vec{w}} \quad \Rightarrow \|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|$$

Série ex: $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$

$$\|\vec{z}\| = \|-\vec{w}\| = \|\underset{\lambda = -1}{-1} \cdot \vec{w}\| = \underbrace{|-1|}_{1} \cdot \|\vec{w}\| \quad \Rightarrow \|\vec{z}\| = \|\vec{w}\|$$

Exercice : prouvez que $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$

$$(\vec{x} \wedge \vec{y}) - (-\vec{y} \wedge \vec{x}) = \vec{0}$$

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$ CQFD

$$-\vec{y} \wedge \vec{x} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 x_3 + y_3 x_2 \\ y_1 x_3 - y_3 x_1 \\ -y_1 x_2 + y_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \wedge \vec{y} - (-\vec{y} \wedge \vec{x}) = \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$$

CQFD !

En 2D, l'équation cartésienne d'une droite D parallèle à $\vec{x}$ passant par le point A.

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 - a_1 x_2 + a_2 x_1 = 0 \qquad \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma = 0$$

$\vec{x}$ // à D

En 3D, on peut aussi exprimer une droite au moyen d'une direction $\vec{x}$ et d'un point A !

Tout point sur la droite peut s'écrire comme

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = a_1+\lambda x_1\\ p_2 = a_2+\lambda x_2\\ p_3 = a_3+\lambda x_3\end{cases}$$

Equ. Paramétriques de ...

On pourrait étendre la logique à n'importe quelle dimension.

$$\lambda = \lambda + \lambda - \lambda$$

$$\lambda = \underbrace{\frac{p_1-a_1}{x_1}} + \underbrace{\frac{p_2-a_2}{x_2}} - \underbrace{\frac{p_3-a_3}{x_3}} \Rightarrow \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta = \lambda$$

Le paramètre n'est PAS éliminé ici !!!

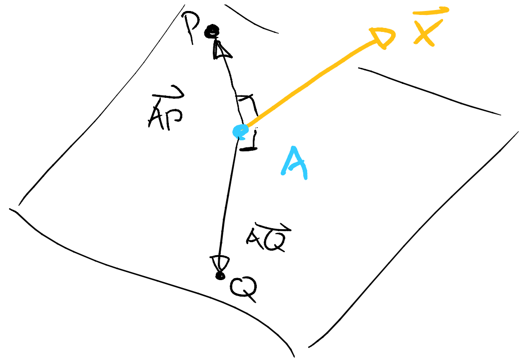
Comment décrire un plan en 3D ?

- 3 points qui ne sont pas COLINEAIRES !
- 2 vecteurs et 1 point
- 1 vecteur perpendiculaire ET 1 point

Comment calculer l'équation cartésienne d'un plan contenant le point A et PERPENDICULAIRE à la direction $\vec{x}$

$\vec{x}$ c'est un vecteur <u>NORMAL</u>

x c'est un vecteur NORMAL



$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

↳ $\vec{AP} \perp \vec{x}$

$$\langle \vec{AP}, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = p_1 x_1 - a_1 x_1 + p_2 x_2 - a_2 x_2 + p_3 x_3 - a_3 x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0}$$

Equation cartésienne du plan contenant A et perpendiculaire à la direction $\vec{x}$.

INTERSECTION :

2D :

- Intersection de 2 droites => quel résultat obtient-on ?
  - 1 point
  - Pas d'intersection (droites parallèles)
  - Infinité de points (si les droites sont identiques)

3D:

- Intersection de 2 droite
  - Mêmes résultats qu'en 2D....
  - Possible d'avoir AUCUNE intersection même si les droites ne sont PAS parallèles..... C'est le cas si les deux droites se trouvent dans des PLANS PARALLELES....
- Intersection de 2 plans
  - 1 droite

- $\circ$ 1 plan (identiques)
- $\circ$ Rien s'ils sont parallèles…

- Intersection d'une droite et d'un plan
  - $\circ$ 1 point
  - $\circ$ La droite entière (si elle se trouve dans le plan)
  - $\circ$ Rien si la droite se trouve dans un plan parallèle

Exemple : l'intersection de 2 droites

$D_1 : \quad 3p_1 - 2p_2 + 4 = 0$ pour tout point sur D_1

$D_2 : \quad 4p_1 + 3p_2 - 1 = 0$ — — — D_2

Trouvons l'intersection de D1 et D2 (point P)

$$P \in D_1 \Rightarrow \begin{cases} 3\boxed{p_1} - 2\boxed{p_2} + 4 = 0 \\ 4\boxed{p_1} + 3\boxed{p_2} - 1 = 0 \end{cases}$$
$P \in D_2 \Rightarrow$

2 équ. 2 inconn.

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2 = \dfrac{3p_1 + 4}{2} = \dfrac{\frac{-30}{17} + 4}{2} = -\frac{15}{17} + 2 = \frac{19}{17} \\ 4p_1 + 3\left(\dfrac{3p_1 + 4}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow 4p_1 + \frac{9}{2}p_1 + 6 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{17}{2}p_1 = -5 \Rightarrow p_1 = -\frac{10}{17} \qquad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -10/17 \\ 19/17 \end{pmatrix}$$

Vérifions:

$3 \cdot \frac{-10}{17} - 2\,\frac{19}{17} + 4 = 0$ ✓ cf excel $P \in D_1$

$4 \cdot \frac{-10}{17} + 3\,\frac{19}{17} - 1 = 0$ ✓ $P \in D_2$

} c'est bien le point d'intersect. des deux droites !